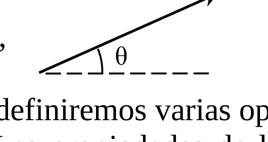
VI. FUERZAS EN EL ESPACIO

Hasta ahora hemos venido estudiando sistemas de fuerzas cuyas líneas de acción están contenidas en un plano. Ahora comenzaremos el estudio de los sistemas en tres dimensiones. Prácticamente no habrá ninguna nueva teoría que añadir, pues simplemente tendremos que trabajar con una componente más de todas las fuerzas. Sin embargo, eso complicará las representaciones gráficas, la determinación de las direcciones de las fuerzas y, sobre todo, lo relativo a los momentos de las fuerzas: ahora tendremos que retomar el hecho de que los momentos de las fuerzas son tendencias a hacer girar los cuerpos respecto a ejes, no a puntos.

Nos resultará muy útil ahora utilizar vectores para representar tanto las fuerzas como sus momentos.

Vectores



Un vector es un segmento dirigido de recta.

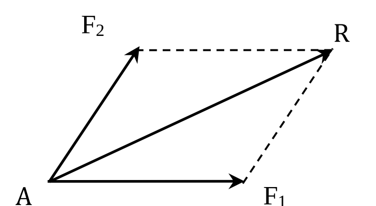
Sus características son 1) magnitud, tamaño, módulo o norma, y 2) dirección.

Para utilizarlos como elementos matemáticos definiremos varias operaciones y estableceremos un álgebra completa. Las propiedades de los vectores, de sus operaciones y de su álgebra, tendrán que ser conformes a las propiedades de las fuerzas, de su composición y resolución, de la obtención de momentos, etc. Una limitante de los vectores es que necesitan otro que defina su posición ([1]).

([1]) La noción más general, que resulta de una extrapolación del concepto prístino, consiste en un conjunto ordenado de número reales. Y en Álgebra lineal, vector es una entidad aún más abstracta, que cumple con cierto número de axiomas. Pero tales concepciones no resultan útiles para el estudio de la Mecánica clásica.

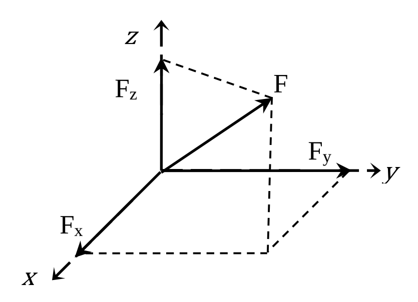
Suma de vectores

La suma de dos vectores que parten de un punto es otro vector que se encuentra en la diagonal del paralelogramo formado conesos dos vectores, y parte también del mismo punto.



Como se ve, sumar vectores, equivale a obtener la resultante de un sistema de dos fuerzas concurrentes.

Componente de un vector $\bar{F}$ es otro vector que al sumarse con uno o varios más, tienen por suma el vector $\bar{F}$. Son componentes cartesianos de un vector aquellos que tienen la dirección de los ejes cartesianos. Es decir:



$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$$

Producto de un escalar por un vector

Un escalar es una cantidad que queda completamente definida por una sola magnitud. En Física son escalares la temperatura, la longitud, el tiempo, la masa, etc. En cambio, son vectores las cantidades que tienen magnitud y dirección, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, el moméntum y otras muchas.

En nuestra álgebra un escalar es un número real.

Al multiplicar un escalar por un número real obtenemos un nuevo vector en la misma dirección que el original. Pero con una magnitud diferente o sentido contrario.

Vectores unitarios

Si tenemos un vector unitario —*i e.*, de magnitud igual a 1— en cierta dirección, los vectores 2**e**, 5**e**. –3**e** son paralelos al primero.

Los vectores **i**, **j** y **k** son vectores unitarios en las direcciones de los ejes equis, ye y zeta, respectivamente. De modo que

$$\bar{F}_x = F_x\mathbf{i}\ ;\ \bar{F}_y = F_y\mathbf{j}\ ;\ \bar{F}_z = F_z\mathbf{k}$$

Y, por fin, un vector queda unívocamente expresado de la siguiente manera

$$\bar{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

que se llama forma polinómica (dada su semejanza con un polinomio algebraico) o normal (puesto que sus tres componentes son normales —perpendiculares— entre sí).

Cosenos directores

Conocida la forma polinómica de un vector, se puede conocer el ángulo que forma con cada uno de los ejes coordenados. Como F_x y F son, respectivamente el cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo entonces

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F};\ \cos\beta = \frac{F_y}{F};\ \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

que son los cosenos directores del vector, y α, β y γ los ángulos que forma con cada uno de los ejes cartesianos.

Un vector unitario cualquiera en forma polinómica sería

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$$

por tanto, dado que la magnitud de un vector es

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}$$

entonces

$$1 = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

que viene a ser una ley de dependencia de los tres ángulos que una recta forma con los ejes coordenados.

Vector apoyado en dos puntos

Supongamos que la línea de acción de una fuerza de magnitud F pasa por los puntos *A* (x_1, y_1, z_1) y *B* (x_2, y_2, z_2).

Para hallar un vector que represente tal fuerza tendríamos que multiplicar la magnitud de la fuerza por un vector unitario en la dirección *AB*. Es decir

$$\bar{F} = F\mathbf{e}$$

Pero

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

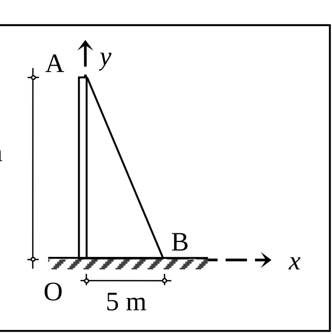
y su magnitud es

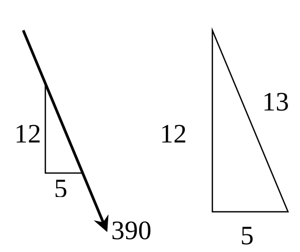
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

o sea que

$$\bar{F} = F\left[\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\right]$$

Ejemplo. La tensión del cable *AB* es de 390 kg. Diga qué vector representa la tensión que el cable ejerce sobre el punto *A* del poste de la figura. El cable y el poste están contenidos en el plano *xy*.





$$F_x = 390\left(\frac{5}{13}\right) = 150$$

$$F_y = -390\left(\frac{12}{13}\right) = -360$$

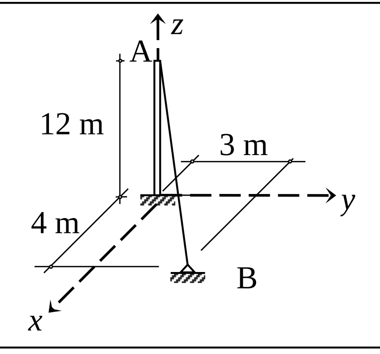
$$\boxed{\bar{F} = 150\,\mathbf{i} - 360\,\mathbf{j}\ [\text{kg}]}$$

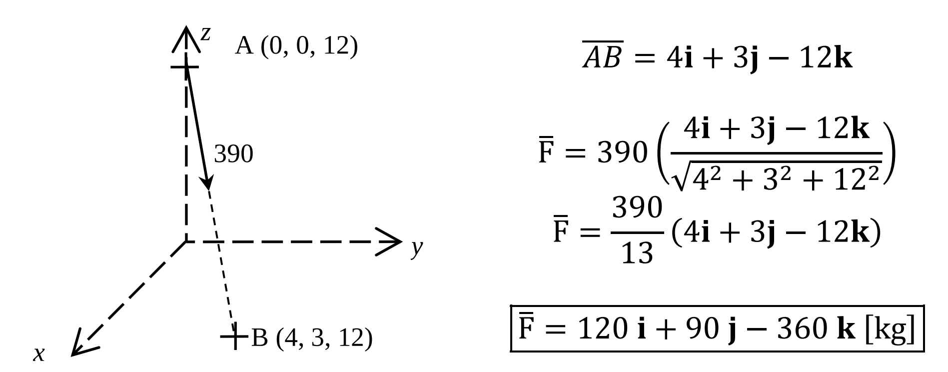
O bien: como $\overline{AB} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

$$\bar{F} = 390\left(\frac{5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}}{\sqrt{5^2 + 12^2}}\right) = \frac{390}{13}(5\mathbf{i} - 12\mathbf{j})$$

$$\boxed{\bar{F} = 150\,\mathbf{i} - 360\,\mathbf{j}\ [\text{kg}]}$$

Ejemplo. La tensión del cable *AB* es de 390 kg. Diga qué vector representa la tensión que el cable ejerce sobre el punto *A* del poste de la figura.





Observe que el procedimiento seguido en los dos ejemplos anteriores es equivalente. Pero en el caso de los problemas en el plano, el lenguaje vectorial resulta generalmente innecesario.

Resultantes de los sistemas de fuerzas en el espacio

Obtener el sistema resultante de un sistema de fuerzas en el espacio quiere decir hallar otro sistema equivalente —que produzca los mismos efectos externos— más simple. En general, tal sistema está formado por una fuerza y un par de fuerzas. Es frecuente que la simplicidad del sistema que se busca, más que en el número de fuerzas que lo constituya, se refiera a la facilidad de manejarlo o entenderlo. Por ejemplo: a veces se quiere sustituir dos fuerzas de direcciones o posiciones incómodas, por una aplicada en algún determinado punto y un par que la acompañe.

Resultantes de sistemas de fuerzas concurrentes en el espacio

Si las líneas de acción de mil fuerzas concurren en un punto, la iteración del principio de Stevin nos llevaría a determinar las características de una sola fuerza equivalente. Dicha fuerza sería la resultante del sistema y

la iteración del principio de Stevin, tal como estudiamos para el caso de fuerzas coplanares, se obtendría mediante la suma vectorial de las mil fuerzas. Simbólicamente

$$\bar{R} = \sum \bar{F}$$

Ejemplo. Las tensiones en los cables *AB, AC* y *CD* de la figura son, respectivamente, 140, 280 y 240 lb. Determine la resultante de las tres tensiones que se ejercen sobre el extremo *A* de la pluma.

z
A (0,0,24’)
C (-6’,-8’,0)
D (0,18’,0)
O
y
B (12’,-8’,0)
x

Escribimos los vectores que representan a cada una de las fuerzas que se dirigen desde *A* hacia *B, C* y *D*

$$\overline{\mathrm{T_{AB}}} = 140\left(\frac{12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{12^2 + 8^2 + 24^2}}\right) = 60\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$$

$$\overline{\mathrm{T_{AC}}} = 280\left(\frac{-6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{6^2 + 8^2 + 24^2}}\right) = -60\mathbf{i} - 80\mathbf{j} - 240\mathbf{k}$$

$$\overline{\mathrm{T_{AD}}} = 240\left(\frac{18\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{18^2 + 24^2}}\right) = 144\mathbf{j} - 192\mathbf{k}$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F}$$

$$\bar{R} = (60 - 60)\mathbf{i} + (-40 - 80 + 144)\mathbf{j} + (-120 - 240 - 192)\mathbf{k}$$

$$\boxed{\bar{\mathrm{R}} = 24\mathbf{j} - 552\,\mathbf{k}\ [\mathrm{lb}]}$$

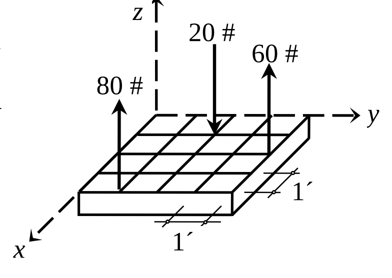
Resultantes de sistemas de fuerzas paralelas en el espacio

Dos fuerzas paralelas están necesariamente contenidas en un plano, sus línea de acción definen el plano. Y su resultante es una fuerza paralela a ellas, también contenida en ese plano, cuya magnitud es igual a la suma

algebraica de las dos fuerzas, y su posición es tal que produzca, respecto a cualquier eje, un momento igual a la suma de los momentos de las dos fuerzas del sistema.

Si se desea encontrar la resultante de un sistema de mil fuerzas paralelas, que no estén contenidas en un plano, basta reiterar el procedimiento anterior de dos en dos fuerzas. Al final, la resultante será una fuerza paralela a todas ellas, cuyos momentos respecto a dos ejes perpendiculares entre sí y a las líneas de acción de las fuerzas, es igual a la suma de los momentos de las fuerzas del sistema respecto a dichos ejes. Ilustraremos el procedimiento con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sobre una losa horizontal actúan las fuerzas verticales que se muestran en la figura. Determine la magnitud y la dirección de su resultante, y diga en qué punto su línea de acción corte al plano *xy*.



Comenzaremos sumando algebraicamente las fuerzas para obtener la magnitud y el sentido de la resultante

$$R = \sum F_z$$
$$R = 80 - 20 + 60 = 120$$
$$\boxed{\text{R} = 120\text{ lb } \uparrow}$$

Su sentido es hacia arriba pues el signo de la suma resultó positivo.

Ahora calcularemos los momentos de las fuerzas respecto a los ejes x y *y*; respecto al eje z no producen momentos

$$M_{x'x}R = \sum M_{x'x}F$$
$$120\,\bar{y} = 80(1) - 20(2) + 60(4)$$
$$\bar{y} = \frac{280}{120} = 2.33$$

Suponiendo que $\bar{x}$ sea positiva, como R se dirige hacia arriba, produce un momento negativo respecto al eje y.

$$M_{y'y}R = \sum M_{y'y}F$$
$$-120\,\bar{x} = -80(4) + 20(1) - 60(2)$$
$$\bar{x} = \frac{-420}{-120} = 3.5$$

Por tanto, la línea de acción de R para por el punto

$$\boxed{P(2.33', 3.5', 0)}$$

Como puede apreciarse, para la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio se requieren las siguientes ecuaciones escalares

$$R = \sum F$$
$$M_{x'x}R = \sum M_{x'x}F$$
$$M_{y'y}R = \sum M_{y'y}F$$

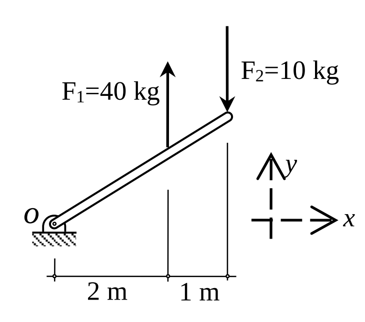
En el caso del ejemplo el cálculo de los momentos con respecto a los ejes cartesianos se realizó multiplicando las magnitudes de las fuerzas por las distancias de sus líneas de acción a los ejes correspondientes. Cuando una fuerza no es paralela a ninguno de los ejes coordenados, se podrá obtener sus momentos respecto a los ejes descomponiendo la fuerza en sus componentes cartesianas y multiplicando sus magnitudes por las distancias de sus líneas de acción a los ejes. Como el proceso puede resultar muy laborioso, sistematizaremos el cálculo de los momentos de una fuerza cualquiera mediante una nueva operación vectorial: el producto vectorial (o cruz) de dos vectores.

Vector momento de una fuerza

Con el fin de simplificar el cálculo de los momentos de las fuerzas en el espacio, vamos a asociar el momento de una fuerza respecto a un punto con un vector. Convendremos en que dicho vector tendrá la magnitud del momento y será perpendicular al plano definido por la línea de acción de

la fuerza y el punto; y convendremos también que su sentido seguirá la regla de la mano derecha (o del tornillo de rosca derecha).

Tomemos como ejemplo la palanca de la figura, contenida en el plano *xy*, sujeta a la acción de las dos fuerzas mostradas, también contenidas en ese plano. El momento de F_1 respecto a *O* es $M_oF_1 = 40\ (2) = 80$ en sentido contrario de las manecillas del reloj. El vector con que vamos a asociar o representar ese momento es un vector perpendicular al plano *xy*, de magnitud 80, y cuyo sentido es hacia el lado positivo del eje de las zetas (que no se ve); por tanto, podemos escribir



$$\overline{M_oF_1} = 80\ \mathbf{k}\ [\text{kg} \cdot \text{m}]$$

En cambio, el momento de F_2, cuyo sentido es contrario al del momento anterior, quedará representado con el vector

$$\overline{M_oF_2} = -30\ \mathbf{k}\ [\text{kg} \cdot \text{m}]$$

Momento de una fuerza en el espacio

Consideremos primera el caso del momento de una fuerza en el plano cartesiano. Se la fuerza de magnitud F, cuya línea de acción pasa por el punto P de coordenadas P(x, y) y cuyas componentes son Fx y Fy.

Conforme al teorema de Varignon (el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto al mismo punto):

$$M_oF = M_oF_x + M_oF_y$$
$$M_oF = -yF_x + xF_y$$

que se puede escribir así

$$M_oF = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

y el vector asociado a este momento, según vimos en el apartado anterior, es

$$\overline{M_oF} = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Téngase presente que al decir que es el momento de la fuerza con respecto al punto *O*, nos estamos refiriendo en realidad al momento de la fuerza con respecto al eje de las zetas.

El lector podrá comprobar fácilmente que si repetimos el procedimiento con fuerzas contenidas en los otros planos cartesianos o en planos paralelos a ellos, se obtendría

$$\overline{M_{x'x}F} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \mathbf{i}$$

$$\overline{M_{y'y}F} = \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \mathbf{j}$$

Diremos que el momento de la fuerza respecto al origen O será la suma vectorial de los momentos de la fuerza con respecto a los ejes coordenados:

$$\overline{M_oF} = \overline{M_{x'x}F} + \overline{M_{y'y}F} + \overline{M_{z'z}F}$$

es decir

$$\overline{M_oF} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_y \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

que vamos a concentrar, dándole la forma de un determinante:

$$\overline{M_oF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Nótese que el segundo renglón contiene las coordenadas de un punto de la línea de acción de la fuerza. Y se pueden considerar las componentes de un vector que une el centro de momentos (en este caso el origen) con un

punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza y que llamaremos vector de posición:

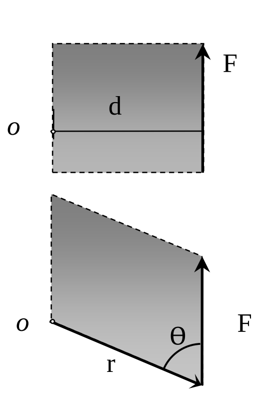
$$\bar{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Esta operación con vectores se denomina *producto vectorial* y se simboliza así:

$$\overline{M_o F} = \bar{r} \text{ x } \bar{F}$$

También se llama *producto cruz*, dado el símbolo que se utiliza.

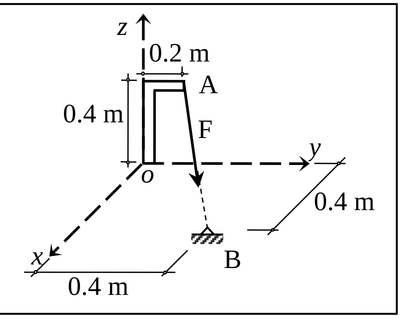
Evidentemente, la magnitud del vector momento tiene que resultar igual al producto de la magnitud de la fuerza por la distancia de su línea de acción al punto. Gráficamente, corresponde al área del rectángulo cuyos lados son la fuerza y la distancia. Pero como el vector de posición r va del centro de momentos a cualquier pun-to de la línea de acción de la fuerza, y d es igual a r sen θ, se tiene que la magnitud del producto cruz es igual al producto de las magnitudes de los factores por el seno del ángulo que forman entre sí. Simbólicamente



$$\left|\overline{\bar{r} \text{ x } \bar{F}}\right| = Fr \operatorname{sen} \theta$$

y es igual al área del paralelogramo formado con esos dos vectores.

Ejemplo. Diga qué vector representa el momento de la fuerza F, de 24 kg, respecto al origen del sistema de referencia. Y diga también cuáles son los momentos de esa fuerza con respecto a cada uno de los ejes cartesianos.



El vector fuerza es

$$\bar{\mathrm{F}} = 24\left(\frac{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}}{\sqrt{2(0.2^2) + 0.2^2}}\right) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

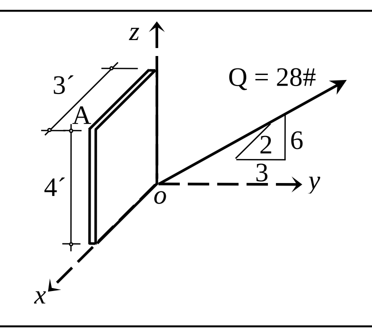
Y podemos elegir como vector de posición al

$$\bar{r} = \overline{\mathrm{OA}} = 0.2\mathbf{j} + 0.4\mathbf{k}$$

$$\overline{M_o F} = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 16 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overline{M_o F} = -6.4\mathbf{i} + 6.4\mathbf{j} - 3.2\mathbf{k}\ [\mathrm{kg \cdot m}]}$$

Ejemplo. ¿Cuál es el momento de la fuerza Q respecto al punto *A*?



$$\bar{\mathrm{Q}} = 28\left(\frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}\right) = 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 24\mathbf{k}$$

Y podemos elegir como vector de posición al

$$\bar{r} = \overline{\mathrm{AO}} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$$

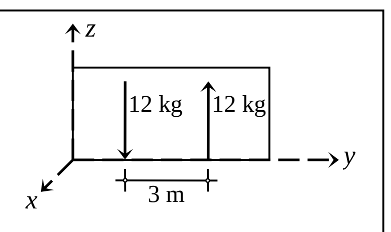
$$\overline{M_A Q} = \bar{r} \times \bar{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & -4 \\ 8 & 12 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overline{M_A Q} = 48\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 36\mathbf{k}\ [\mathrm{lb \cdot ft}]}$$

Pares de fuerzas

Así como el momento de una fuerza respecto a un punto lo representamos mediante un vector perpendicular al plano que contiene al punto y a la línea de acción de la fuerza, un par de fuerzas lo asociaremos a un vector perpendicular al plano del par, cuya magnitud se la del par, y cuyo sentido siga la regla de la mano derecha.

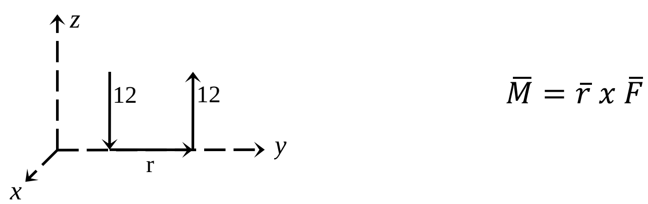
Ejemplo. Diga con qué vector se puede representar el par mostrado en la figura. Las dos fuerzas están contenidas en el plano yz.



Podemos hallar el vector par de varias maneras. Como la magnitud del par es de 12(3) = 36, y el vector debe tener la dirección del eje de las equis, entonces

$$\bar{M} = 36\,\boldsymbol{i}\ [\text{kg} \cdot \text{m}]$$

Otra manera de hallarlo, que será a más común en los problemas del espacio, es utilizar un vector de posición que parata de un punto cualquiera de una de las fuerzas, y llegue a otro punto cualquiera de la otra. De modo que



$$\bar{M} = \bar{r}\ x\ \bar{F}$$

Para nuestro ejemplo el vector de posición puede ser

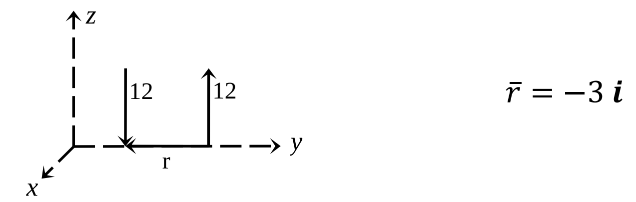
$$\bar{r} = 3\,\boldsymbol{j}$$

Y realizando el producto cruz, obtenemos el vector buscado:

$$\bar{M} = 3\,\boldsymbol{j}\ x\ 12\,\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\bar{M} = 36\,\boldsymbol{i}\ [\text{kg} \cdot \text{m}]}$$

Podríamos haber elegido otro vector de posición:



$\bar{r} = -3\ \boldsymbol{i}$

Y el producto vectorial quedaría como sigue:

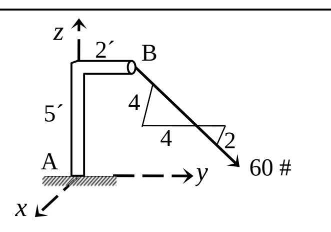
$\overline{M} = -3\ \boldsymbol{j}\ x\ (-12\ \boldsymbol{k})$
$\overline{M} = 36\ \boldsymbol{i}$ [kg · m]

Pero el resultado es el mismo.

Par de transporte

Como en el caso del plano, si se desea transportar una fuerza sin que se alteren los efectos externos, se añade un par de transporte, cuyas características deberán ser las del momento que la fuerza produce, en su posición original respecto a la final.

Ejemplo. Transporte la fuerza aplicada en B, al empotramiento A, sin que se alteren los efectos externos que produce sobre la barra.



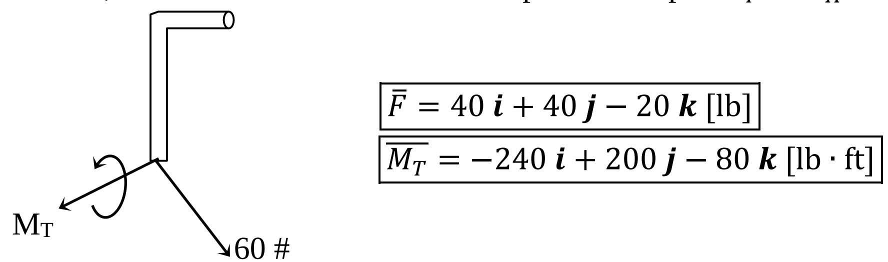
Hallamos el momento de la fuerza respecto a A:

$\overline{M_A F} = \bar{r}\ x\ \bar{F}$
$\bar{r} = 2\ \boldsymbol{j} + 5\ \boldsymbol{k}$

$$\bar{F} = 60\left(\frac{4\ \boldsymbol{i} + 4\ \boldsymbol{j} - 3\ \boldsymbol{k}}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}}\right) = 40\ \boldsymbol{i} + 40\ \boldsymbol{j} - 20\ \boldsymbol{k}$$

$$\overline{M_A F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 40 & 40 & -20 \end{vmatrix} = -240\,\boldsymbol{i} + 200\,\boldsymbol{j} - 80\,\boldsymbol{k}$$

Por tanto, colocamos la fuerza en A acompañada del par $\bar{M}_T = \overline{M_A F}$



$$\boxed{\bar{F} = 40\,\boldsymbol{i} + 40\,\boldsymbol{j} - 20\,\boldsymbol{k}\ [\text{lb}]}$$
$$\boxed{\overline{M_T} = -240\,\boldsymbol{i} + 200\,\boldsymbol{j} - 80\,\boldsymbol{k}\ [\text{lb} \cdot \text{ft}]}$$

Es importante observar que el par de transporte es perpendicular a la fuerza. Lo cual significa que el procedimiento inverso, sustituir una fuerza y un par por una sola fuerza, es posible solamente cuando el vector par y el vector fuerza son perpendiculares entre sí.

Resultantes de sistemas generales de fuerzas en el espacio

Hemos dicho que *resultante* de un sistema de fuerzas es el sistema equivalente más simple. Es claro que para un sistema de fuerzas coplanares el sistema equivalente más simple es o una fuerza o un par de fuerzas. Sin embargo, el término *resultante*, para el caso de la fuerzas en tres dimensiones, puede resultar bastante ambiguo, por lo siguiente. Si sobre un cuerpo actúan mil fuerzas no coplanares, ni concurrentes, ni paralelas, en general se puede hallar un sistema equivalente formado por una fuerza cuya línea de acción pase por un punto previamente elegido y un par de fuerzas, es decir, por tres fuerzas; claramente se ve que este sistema de tres fuerzas es más simple que el de mil, pero quizá pueda existir otro sistema equivalente aún más simple. Si sobre un cuerpo actúan tres, o incluso dos fuerzas, si se elige un punto arbitrario, generalmente llamado origen, y se procede a encontrar un sistema equivalente, llegaremos a un sistema formado por una fuerza y un par, sistema que de ninguna manera es más simple que

el original. Sin embargo, puede tener interés conocer este nuevo sistema, porque se ha determinado en función de un cierto origen que presente alguna ventaja para el tratamiento de las fuerzas. Además, un sistema fuerza-par es equivalente a infinidad de sistemas fuerza-par. Se pueden dar los casos en que el sistema se pueda reducir a una sola fuerza o a un solo par: en estos casos se trata de verdaderos sistemas resultantes, que no admi-ten ambigüedad alguna.

De cualquier forma, siempre podremos proceder de la siguiente manera: elegimos un sistema de referencia, incluido su origen. Cada una de la fuerzas se transporta al origen y se acompaña de un par de transporte, de modo que no se alteren los efectos externos. Todas las fuerzas, mediante su suma vectorial, se reducen a una, $\bar{R}$, y todos los pares, a uno, $\overline{M_O R}$, también mediante su suma vectorial. Es decir las ecuaciones vectoriales que nos permiten determinar el sistema fuerza-par equivalente son

$$\bar{R} = \sum \bar{F}$$
$$\overline{M_o R} = \sum \overline{M_o F}$$

que se convierten en las seis ecuaciones escalares siguientes:

$$R_x = \sum F_x \qquad M_{x'x} R = \sum M_{x'x} F$$
$$R_y = \sum F_y \qquad M_{y'y} R = \sum M_{y'y} F$$
$$R_z = \sum F_z \qquad M_{z'z} R = \sum M_{z'z} F$$

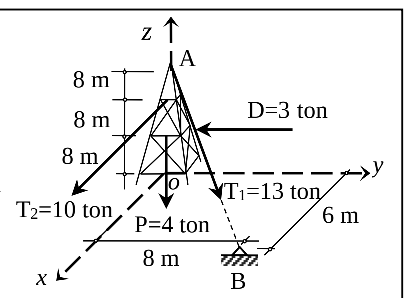
Desde luego, si se elige un sistema de referencia distinto, los resultados serán distintos, aunque se tratará de otro sistema equivalente.

Ejemplo. Sustituya las cuatro fuerzas que actúan sobre la torre de la fi-gura por una fuerza aplicada en el origen del sistema de referencia y un par.

Los vectores fuerza son

$\overline{T_1} = 13\left(\frac{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{6^2 + 8^2 + 24^2}}\right) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$
$\overline{T_2} = 10\mathbf{i}$
$\overline{D} = -3\mathbf{j}$
$\overline{P} = -4\mathbf{k}$
$\overline{M_o T_1} = 24\mathbf{k} \text{ x } (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}) = -96\mathbf{i} + 72\mathbf{j}$
$\overline{M_o T_2} = 16\mathbf{k} \text{ x } 10\mathbf{i} = 160\mathbf{j}$
$\overline{M_o D} = 8\mathbf{k} \text{ x } (-3\mathbf{j}) = 24\mathbf{i}$
$\overline{M_o P} = \overline{0}$
$\bar{R} = \sum \bar{F}$
$\boxed{\overline{R} = 13\ \mathbf{i} + \mathbf{j} - 16\ \mathbf{k}\ [\text{ton}]}$
$\overline{M_o R} = \sum \overline{M_o F}$
$\boxed{\overline{M_o R} = -72\ \mathbf{i} + 232\mathbf{j}\ [\text{ton} \cdot \text{m}]}$

Ejemplo. Determine el sistema fuerza-par equivalente al sistema de fuerzas que actúa sobre la torre del problema anterior, en que la fuerza esté aplicada en el punto A.



El problema se puede resolver de dos maneras: como si se tratara de uno nuevo, o utilizando el resultado que se obtuvo en el ejemplo anterior. Utilizaremos el segundo método como comprobación.

Primer método

La fuerza $\overline{R}$ será la misma del ejemplo anterior, pero aplicada en A. En cambio, para hallar el par, debemos calcular los momentos de la fuerza con respecto al punto A.

$\overline{M_A T_1} = \overline{0}$
$\overline{M_A T_2} = -8\mathbf{k} \text{ x } 10\mathbf{i} = -80\mathbf{j}$
$\overline{M_A D} = -16\mathbf{k} \text{ x } (-3\mathbf{j}) = -48\mathbf{i}$

$\overline{M_o \text{P}} = \bar{0}$

$\boxed{\bar{\text{R}} = 12\ \mathbf{i} + \mathbf{j} - 16\ \mathbf{k}\ [\text{ton}]}$

$\overline{M_A R} = \sum \overline{M_A F}$

$\boxed{\overline{M_A R} = -48\ \mathbf{i} + 80\mathbf{j}\ [\text{ton} \cdot \text{m}]}$

Segundo método

Transportamos la fuerza $\bar{\text{R}}$ obtenida en el ejemplo anterior al punto A

$\overline{M_A R} = \sum \overline{M_A F} = \bar{r} \text{ x } \bar{R} + \overline{M_o R}$

$\bar{r} \text{ x } \bar{R} = -24\mathbf{k} \text{ x } (12\mathbf{i} + \mathbf{j} - 16\mathbf{k}) = 24\mathbf{i} - 288\mathbf{j}$

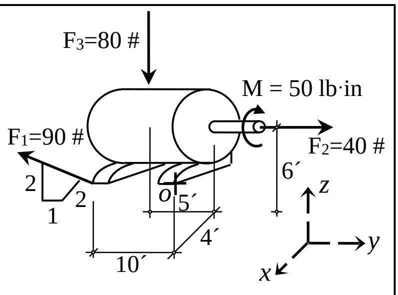
por tanto

$\overline{M_A R} = 24\ \mathbf{i} - 288\mathbf{j} + (-72\mathbf{i} + 208\mathbf{j})$

$\boxed{\bar{\text{R}} = 12\ \mathbf{i} + \mathbf{j} - 16\ \mathbf{k}\ [\text{ton}]}$

$\boxed{\overline{M_A R} = -48\ \mathbf{i} + 80\mathbf{j}\ [\text{ton} \cdot \text{m}]}$

Ejemplo. Sobre el motor eléctrico de la figura se aplica un sistema formado por las tres fuerzas y el par mostrados. Sustituya dicho sistema de fuerzas por un sistema fuerza-par en el punto O.



$$\overline{\text{F}_1} = 90\left(\frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}\right) = 20\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$$

$\overline{\text{F}_2} = 40\mathbf{j}$

$\overline{\text{F}_3} = -80\mathbf{k}$

$\overline{M_o \text{F}_1} = -10\mathbf{j} \text{ x } (20\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 20\mathbf{k}) = -200\mathbf{i} + 200\mathbf{k}$

$\overline{M_o \text{F}_2} = (-4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) \text{ x } 40\mathbf{j} = -240\mathbf{i} - 160\mathbf{k}$

$\overline{M_o \text{F}_3} = (-4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) \text{ x} (-80\mathbf{k}) = -400\mathbf{i} - 320\mathbf{j}$

$\bar{M} = -50\mathbf{j}$

$\bar{R} = \sum \bar{F}$

$\boxed{\bar{\mathrm{R}} = 20\ \mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 60\ \mathbf{k}\ [\mathrm{lb}]}$

$\overline{M_o R} = \sum \overline{M_o F}$

$\boxed{\overline{M_o R} = -40\ \mathbf{i} - 370\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\ [\mathrm{lb} \cdot \mathrm{in}]}$

Fuerza y par perpendiculares

Cuando el vector fuerza y el vector par de un sistema fuerza-par son perpendiculares, significa que las tres fuerzas están contenidas en el mismo plano (puesto que el vector par es perpendicular al plano formado por las líneas de acción de las fuerzas del par). Y, por tanto, esa fuerza es resultante del sistema, una vez que se coloque en su debida posición, es decir, en el punto en que se pueda suprimir la acción del par, tal como se hizo en los problemas de fuerzas en el plano. Simbólicamente se puede expresar así:

$$\overline{M_o R} = \bar{r} \times \bar{R}$$

La pregunta obligada es ¿cómo saber s dos vectores son perpendiculares? A lo que se responde que cuando su producto escalar es nulo. Definiremos, por tanto ahora, el producto escalar.

Producto escalar (o punto) de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es el número real que resulta de la suma de los productos de sus componentes respectivas. O sea

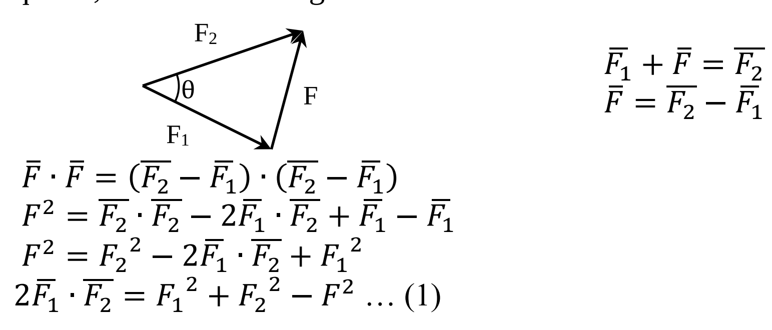
$\overline{F_1} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}\ \ ;\ \overline{F_2} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

$\boxed{\overline{F_1} \cdot \overline{F_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$

Este producto se llama también *producto punto* por el símbolo que se utiliza. De la definición se deduce que el producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su magnitud:

$$\overline{F_1} \cdot \overline{F_1} = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2$$

De esta propiedad podemos deducir otra, apoyándonos en un triángulo cualquiera, como el de la figura.



$$\overline{F_1} + \overline{F} = \overline{F_2}$$
$$\overline{F} = \overline{F_2} - \overline{F_1}$$

$$\overline{F} \cdot \overline{F} = (\overline{F_2} - \overline{F_1}) \cdot (\overline{F_2} - \overline{F_1})$$
$$F^2 = \overline{F_2} \cdot \overline{F_2} - 2\overline{F_1} \cdot \overline{F_2} + \overline{F_1} - \overline{F_1}$$
$$F^2 = {F_2}^2 - 2\overline{F_1} \cdot \overline{F_2} + {F_1}^2$$
$$2\overline{F_1} \cdot \overline{F_2} = {F_1}^2 + {F_2}^2 - F^2 \ \dots (1)$$

Por otro lado, de la ley de cosenos obtenemos

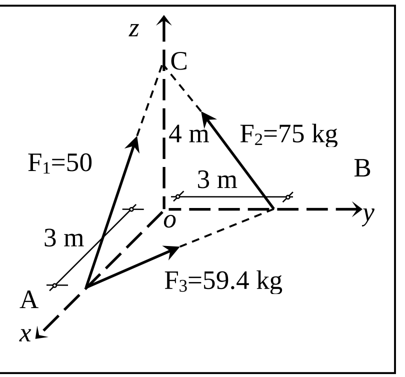
$$F^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 - 2F_1F_2 \cos\theta$$
$$2F_1F_2 \cos\theta = {F_1}^2 + {F_2}^2 - F^2 \ \dots (2)$$

Igualando los primeros miembros de (1) y (2)

$$2\overline{F_1} \cdot \overline{F_2} = 2F_1F_2 \cos\theta$$
$$\boxed{\overline{F_1} \cdot \overline{F_2} = F_1F_2 \cos\theta}$$

Puesto que el producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus magnitudes por el coseno del ángulo que forman entre sí, si dicho producto es cero, significa que los dos vectores son perpendiculares, ya que el coseno de un ángulo recto es cero.

Ejemplo. Sobre un cuerpo actúan las tres fuerzas que se muestran en la figura. Encuentre un sistema fuerza-par equivalente en el origen del sistema de referencia, e investigue si es reductible a una sola fuerza. Si lo es, diga cuál es la fuerza resultante y dé un punto de su línea de acción.



Los vectores rectores involucrados son:

$$\overline{\mathrm{F}_1} = 50\left(\frac{-3\mathbf{i}+4\mathbf{k}}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) = -30\mathbf{i}+40\mathbf{k}$$

$$\overline{\mathrm{F}_2} = 75\left(\frac{-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) = -45\mathbf{j}+60\mathbf{k}$$

$$\overline{\mathrm{F}_3} = 59.4\left(\frac{-3\mathbf{i}+3\mathbf{k}}{3\sqrt{2}}\right) = -42\mathbf{i}+42\mathbf{j}$$

$$\overline{M_o\mathrm{F}_1} = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{F}_1} = 3\mathbf{i} \times (-30\mathbf{i}+40\mathbf{k}) = 3\mathbf{i}+40\mathbf{k} = 3\mathbf{i} \times 40\mathbf{k} = -120\mathbf{j}$$

$$\overline{M_o\mathrm{F}_2} = 3\mathbf{j} \times 60\mathbf{k} = 180\mathbf{i}$$

$$\overline{M_o\mathrm{F}_3} = 3\mathbf{i} \times 42\mathbf{k} = 126\mathbf{k}$$

$$\bar{R} = \sum\bar{F};\quad \overline{\mathrm{R}} = -72\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 100\,\mathbf{k}$$

$$\overline{M_oR} = \sum\overline{M_oF};\quad \overline{M_oR} = 180\,\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 126\mathbf{k}$$

Investigaremos si la fuerza $\overline{\mathrm{R}}$ y el par $\overline{M_oR}$ son perpendiculares entre sí

$$\overline{\mathrm{R}} \cdot \overline{M_oR} = -72(180) + (-3)(-120) + 100\,(126) = 0$$

Sí son perpendiculares, puesto que su producto escalar es nulo.

Para que no se alteren los efectos extremos al suprimir el par, los efectos de éste los deberá producir la fuerza $\overline{\mathrm{R}}$ en una posición $\bar{\mathrm{r}}$ tal que

$$\overline{M_oR} = \bar{r} \times \bar{R}$$

Elegiremos un vector de posición $\bar{\mathrm{r}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, que irá del origen al punto P de la línea de acción de la fuerza que corta al plano *xy*

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (-72\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 100\,\mathbf{k}) = 180\,\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 126\mathbf{k}$$

o sea

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ -72 & -3 & 100 \end{vmatrix} = 180\,\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 126\mathbf{k}$$

de donde se obtienen las siguientes ecuaciones

$$100\,y = 180 \quad \rightarrow y = 1.8$$
$$-100\,x = -120 \quad \rightarrow x = 1.2$$

La tercera nos sirve de comprobación

$$-3x + 72y = 126 \qquad \rightarrow -3(1.2) + 72(1.8) = 126$$

La fuerza resultante es $\overline{\mathrm{R}} = -72\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 100\,\mathbf{k}$ [kg] y su línea de acción pasa por el punto $\mathrm{P}(1.2, 1.8, 0)$ [m]

Conviene saber que cualquier sistema fuerza-par es equivalente a otro en el que los vectores fuerza y par son paralelos. Estos sistemas reciben el nombre de llaves de torsión o de motores en algunos textos.

Equilibrio de los sistemas de fuerzas en el espacio

Como sabemos, un sistema de fuerzas está en equilibrio si su resultante es nula. Los sistemas de fuerzas en el espacio deben cumplir, por tanto con dos ecuaciones vectoriales, la suma de las fuerzas debe ser igual a cero, así como la suma de los momentos con respecto a un punto cualquiera. Simbólicamente

$$\sum \overline{F} = 0$$

$$\sum \overline{M_o F} = 0$$

Estas dos ecuaciones vectoriales equivalen a seis ecuaciones escalares:

$$R_x = \sum F_x \qquad M_{x'x}R = \sum M_{x'x}F$$

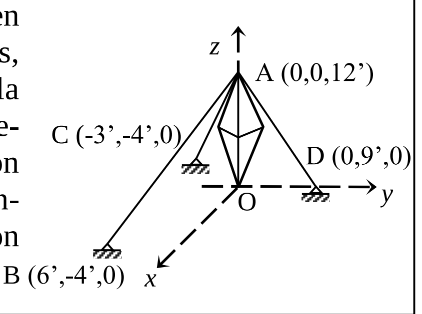
$$R_y = \sum F_y \qquad M_{y'y}R = \sum M_{y'y}F$$

$$R_z = \sum F_z \qquad M_{z'z}R = \sum M_{z'z}F$$

O sea que en un problema isostático se podrá tener hasta seis incógnitas. Pero si las fuerzas son concurrentes, sólo tres, lo mismo que si son paralelas.

Los problemas de equilibrio en el espacio se resuelven comenzando, como con los problemas en el plano, por un diagrama de cuerpo libre, aunque en este caso tales diagramas serán sumamente esquemáticos. Ilustraremos la resolución de problemas con tres ejemplos.

Ejemplo. La pluma de la figura está en equilibrio por la acción de los tres cables, de su peso y del apoyo de cuenca y bola que lo sujeta al suelo. Sabiendo que el peso de la pluma es de 300 kg y la tensión en el cable AB, de 210, calcule las tensiones en los otros dos cables y la reacción del apoyo.



Se trata de un problema de equilibrio de fuerzas concurrentes con tres incógnitas. Los vectores implicados en este problema son:

$$\overline{T_B} = 210\left(\frac{6\mathbf{i} - 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}}{\sqrt{6^2+4^2+12^2}}\right)$$

$$\overline{T_B} = 90 - 60\mathbf{j} - 180\mathbf{k}$$

$$\overline{T_C} = T_C\left(\frac{-3\mathbf{i} - 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}}{\sqrt{6^2+4^2+12^2}}\right)$$

$$\overline{T_C} = -\frac{3T_C}{13}\mathbf{i} - \frac{4T_C}{13}\mathbf{j} - \frac{12T_C}{13}\mathbf{k}$$

$$\overline{T_D} = T_C\left(\frac{9\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}}{\sqrt{9^2+12^2}}\right) = -\frac{3T_D}{5}\mathbf{j} - \frac{4T_D}{5}\mathbf{k}$$

$$\overline{P} = -300\mathbf{k}$$

$$\overline{R_O} = R_O\mathbf{k}$$

Las ecuaciones de equilibrio y sus soluciones son

$\sum F_x = 0$

$90 - \frac{3T_C}{13} = 0; \quad 3T_C = 90(13); \quad \boxed{T_C = 390\text{ kg}}$

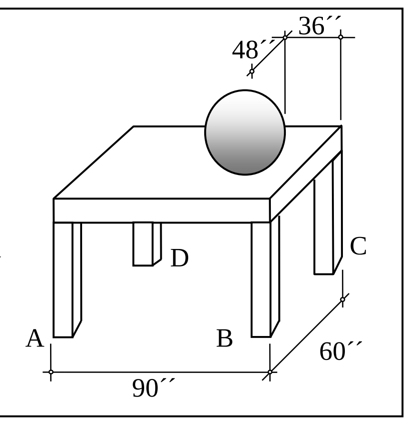
$\sum F_y = 0$

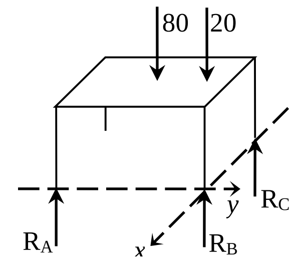
$-60 - \frac{4(390)}{13} + \frac{3T_D}{5} = 0; \quad 3T_D = 300 + 600; \quad \boxed{T_D = 300\text{ kg}}$

$\sum F_z = 0$

$-180 - \frac{12(390)}{13} - \frac{4(300)}{5} - 300 + R_O = 0; \quad \boxed{R_O = 1080\text{ kg} \uparrow}$

Ejemplo. La mesa de la figura pesa 80 lb y 20 la esfera que está colocada sobre ella. Se observa que la pata D no toca el piso. Suponiendo que éste es liso, calcule las reacciones de las patas *A*, *B* y *C*.





Cada uno de los ejes elegidos intersecta la línea de acción de dos incógnitas, lo que facilitará la resolución de las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum M_{x'x}F = 0$$
$$20(36) + 80(45) - 90\mathrm{R_A} = 0$$

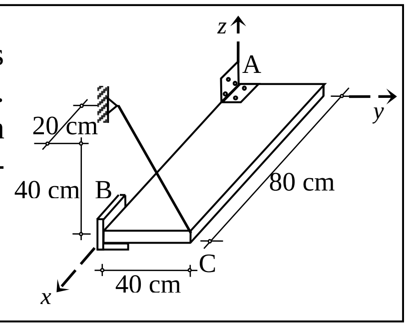
$$\mathrm{R_A}\left(\frac{720 + 3600}{90}\right); \quad \boxed{\mathrm{R_A} = 48\ \mathrm{lb}}$$

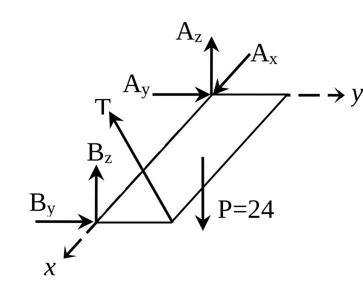
$$\sum M_{y'y}F = 0$$
$$80(30) + 20(60 - 48) - 60\mathrm{R_c} = 0$$
$$240 + 240 - 60R_C = 0$$
$$\mathrm{R_C} = \frac{480}{60}; \quad \boxed{\mathrm{R_C} = 8\ \mathrm{lb}}$$

El eje de las zetas, que no aparece en el diagrama, es perpendicular al de las equis y al de las yes.

$$48 + \mathrm{R_B} + 8 - 80 - 20 = 0$$
$$\boxed{\mathrm{R_B} = 44\ \mathrm{lb}}$$

Ejemplo. El estante de la figura es una tabla homogénea de 24 kg de peso. Está sostenida por una bisagra en *A*, un soporte en *B* y una cuerda. Calcule la tensión de la cuerda y las reacciones *A* y *B*.





Se trata de un sistema general de fuerzas con seis incógnitas. Los vectores que se requieren son:

$\overline{R_A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$

$\overline{R_B} = B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$

$$\overline{T} = T\left(\frac{-20\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 40\mathbf{k}}{\sqrt{20^2 + 2(40^2)}}\right)$$

$$\overline{T} = -\frac{T}{3}\mathbf{i} - \frac{2T}{3}\mathbf{j} + \frac{2T}{3}\mathbf{k}$$

$\overline{P} = -24\mathbf{k}$

$\overline{M_A R_A} = \overline{0}$

$\overline{M_A R_B} = 80\mathbf{i}\ \mathrm{x}\left(B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}\right) = -80B_z\mathbf{j} + 80B_y\mathbf{k}$

$$\overline{M_A T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 80 & 40 & 0 \\ -\frac{T}{3} & -\frac{2T}{3} & \frac{2T}{3} \end{vmatrix} = \frac{80T}{3}\mathbf{i} - \frac{160T}{3}\mathbf{j} - \frac{120T}{3}\mathbf{k}$$

$\overline{M_A P} = (40\,\mathbf{i} - 20\mathbf{j})\mathrm{x}(-24\mathbf{k}) = -480\mathbf{i} + 960\mathbf{j}$

Y las ecuaciones de equilibrio son:

$\sum M_{xx'}F = 0$

$-480 + \frac{80\text{T}}{3} = 0$

$\text{T} = \frac{480(3)}{80}$; $\boxed{\text{T} = 18\ \text{kg}}$

$\sum M_{yy'}F = 0$

$-80\text{B}_\text{z} - \frac{160(18)}{3} + 960 = 0$

$80\text{B}_\text{z} = 160(6) - 960$

$\text{B}_\text{z} = 0$

$\sum M_{zz'}F = 0$

$80\text{B}_\text{y} - \frac{120(18)}{3} = 0$

$\text{B}_\text{y} = 9$

$\sum F_x = 0$

$\text{A}_\text{x} - \frac{18}{3} = 0$

$\text{A}_\text{x} = 6$

$\sum F_y = 0$

$\text{A}_\text{y} + 9 - \frac{2(18)}{3} = 0$

$\text{A}_\text{y} = 3$

$\sum F_z = 0$

$\text{A}_\text{z} + 0 + \frac{2(18)}{3} - 24 = 0$

$\text{A}_\text{z} = 12$

Las reacciones son, por tanto

$\boxed{\overline{R_A} = 6\ \mathbf{i} + 3\ \mathbf{j} + 12\ \mathbf{k}\ [\text{kg}]}$

$\boxed{\overline{R_B} = 9\ \mathbf{j}\ [\text{kg}]}$

Serie de ejercicios de Estática
FUERZAS EN EL ESPACIO

1. En un sistema de referencia cartesiano, en el que los ejes de las equis y de las yes son horizontales, y el de las zetas vertical y dirigido hacia arriba, ¿qué vector representa el peso de un cuerpo de 16 ton, cuyo centro de gravedad es G(3, 4, 2) m?

(*Sol.* $\bar{P}$ = – 16 **k** [ton])

2. Escriba la representación vectorial de una fuerza de 580 N que forma un ángulo de 90º con el eje de las equis, de 30º con el de las yes y de 60º con el de las zetas.

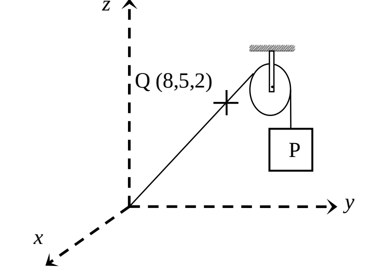
(*Sol.* $\bar{F}$ = 502 **j** + 290 **k** [N])

3. Una fuerza de 150 lb que forma un ángulo de 50º con el eje de las abscisas, tiene una componente, en dirección del deje de las ordenadas, de 90 lb. Determine las magnitudes de las otras dos componentes y escriba el vector que representa dicha fuerza, sabiendo que los tres ángulos directores son agudos.

(*Sol.* F_x = 96.4 lb; F_z = 71.4 lb
$\bar{F}$ = 96.4 **i** + 90 **j** + 71.4 **k** [lb])

4. El cuerpo de la figura pesa 400 kg. ¿Qué vector **T** representa la tensión que la cuerda ejerce sobre O?

(*Sol.* $\bar{T}$ = 332 **i** + 207 **j** + 83 **k** [kg])

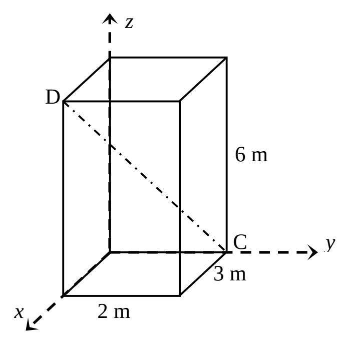


5. La línea de acción de una fuerza de 99 N está dirigida de *A* (2, 4, 4) m hacia *B* (1, 0, –4) m. ¿Cuáles son sus componentes cartesianas?

(*Sol.* F_x = – 11 N; F_y = – 44 N; F_z = – 88 N)

6. Escriba, en forma polinómica (o normal), el vector que representa una fuerza de 175 kg cuya dirección es la de la diagonal *CD* del paralelepípedo de la figura, si su sentido es de *C* hacia *D*.

(*Sol.* $\bar{F}$ = 75 **i** – 50 **j** + 150 **k** [kg])



7. ¿Qué vector unitario tiene la di-rección de la fuerza $\bar{F}$ = 14 **i** – 3 **j** + 18 **k** [N]?

(*Sol.* **e** = 0.609 **i** – 0.1304 **j** + 0.783 **k** [N])

8. ¿Cuál es la magnitud de la proyección de la fuerza $\bar{F}$ = 14 **i** – 13 **j** + 10 **k** [lb] sobre la línea *AB* si las coordenadas de dichos puntos son *A* (–2, 3, 6) in y *B* (1, 7, -6) in?

(*Sol.* 10 lb)

9. Diga qué ángulo forman entre sí las fuerzas $\bar{P}$ = 120 **i** + 200 **j** + 450 **k** [lb] y Q = 340 **i** – 150 **j** + 210 **k** [lb].

(*Sol.* 60.9º)

10. Tres fuerzas parten del origen y pasan por los puntos *A* (2, 1, –2) cm, *B* (–1, 4, 8) cm y *C* (6, –6, 3) cm. Las magnitudes de esas fuerzas son, respectivamente, 30, 45 y 54 N. Determine su resultante.

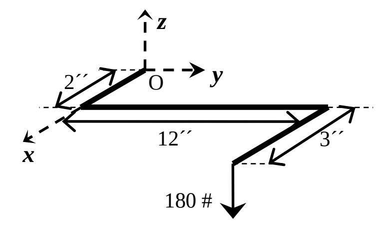
(*Sol.* $\bar{R}$ = 51 **i** – 6 **j** + 38 **k** [N])

11. La tensión de la cuerda *AB* que soporta el estante de la figura es de 18 lb, mientras que la de la cuerda *BC* es de 15.1 lb. ¿Cuál es la resultante de las dos tensiones ejercidas sobre el punto *B*?

(*Sol.* $\overline{R}$ = – 4 **i** + 20 **j** – 20 **k** [lb])

12. Un pedal de bicicleta se prueba sometiéndolo a la acción de una fuerza vertical de 180 lb, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el momento de esa fuerza respecto al punto *O*?

(*Sol.* $\overline{M_O F}$ = – 2160 **i** + 900 **j** [lb·in])

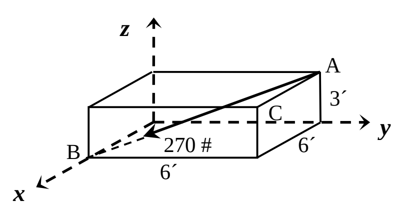


13. Diga qué momentos produce la tensión que la cuerda *AB* ejerce sobre *B*, del problema 11, respecto a los puntos *O* y *C*.

(*Sol.* $\overline{M_O T}$ = – 48 **i** + 84 **j** + 60 **k** [lb·ft]
$\overline{M_C T}$ = 84 **j** + 84 **k** [lb·ft])

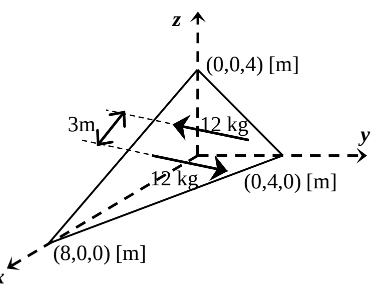
14. Determine la magnitud del momento que la fuerza de la figura de 270 lb produce respecto al origen del sistema de referencia y respecto a cada uno de los ejes coordenados.

(*Sol.* $M_O F$ = 1207 lb·ft; $M_{X'X} F$ = 0;
$M_{Y'Y} F$ = 540 lb·ft; $M_{Z'Z} F$ = 1080 lb·ft)



15. Un par formado por dos fuerzas de 12 kg y cuyas líneas de acción distan entre sí 3 m, actúa en el plano cuyas trazas se muestran en la figura. ¿Qué vector representa a dicho par?

(*Sol.* $\overline{M}$ = 12 **i** + 24 **j** + 24 **k** [kg·m])



16. La fuerza $\bar{F}$ = 12 **i** – 18 **j** + 10 **k** [lb] actúa en el punto *A* (6, 8, 5) ft. Diga qué par se requiere para transportarla al punto *B* (1, 4, 2) ft.

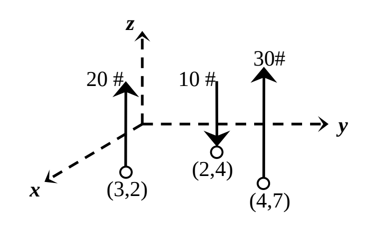
(*Sol.* $\bar{M}$ = 94 **i** – 14 **j** – 138 **k** [lb·ft])

17. Calcule el área del paralelogramo formado por los vectores $\overline{r_1}$ = –75 **i** + 60 **j** + 25 **k** [mm] y $\overline{r_2}$ = 50 **i** + 30 **j** – 45 **k** [mm].

(*Sol.* 66.3 cm^2)

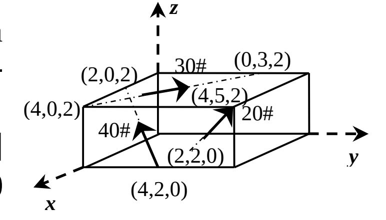
18. En el diagrama se muestran tres fuer-zas de 20, 10 y 30 lb que son paralelas al eje de las zetas. Sus líneas de acción cortan al plano *xy* en los puntos cuyas coordenadas, en ft, son (3, 2), (2, 4) y (4,7) respectivamente. Determine la magnitud, el sentido y la posición de su resultante.

(*Sol.* R = 40 lb ↑; *x* = 4 ft; *y* = 5.25 ft)



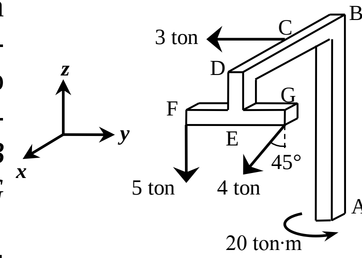
19. Determine la resultante del sistema general de fuerzas que se muestra en la figura. Las coordenadas se dan en ft.

(*Sol.* $\bar{R}$ = – 34.7 **i** + 9.45 **j** + 32.8 **k** [lb]
$\overline{M_O R}$= 29.6 **i** – 159.8 **j** + 35.5 **k** [lb·ft])



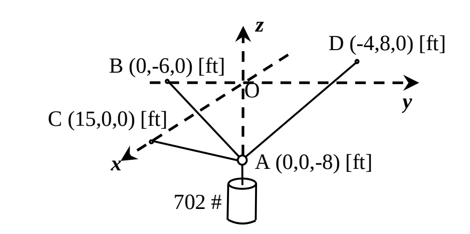
20. Sustituya el sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo de la figura por una fuerza aplicada en *A* y un par. La línea de acción de la fuerza de 4 ton es paralela al plano *ABCDE*; el par de 20 ton·m actúa en un plano horizontal que contiene a *A*. El tramo *AB* mide 3 m; los tramos *BC*, *CD*, *DE*, *EF* y *EG* son todos de 1 m de largo.

(*Sol.* $\bar{R}$ = 2.83 **i** – 3 **j** – 7.83 **k** [ton]
$\overline{M_A R}$ = 11.17 **i** +21.3 **j** + 14.17 **k** [ton·m])



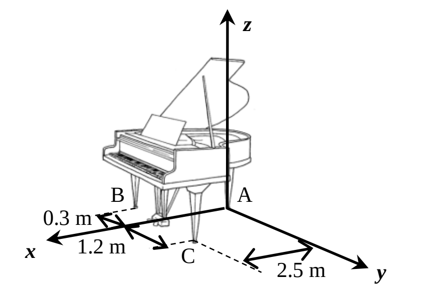
21. El cuerpo de 702 lb, tal como se muestra en la figura, está suspendido por tres cuerdas. Determine la tensión de cada una de ellas.

(*Sol.* T_{AB} = 450 lb; T_{AC} = 153 lb; T_{AD} = 405 lb)



22. La figura representa, esquemáticamente, un piano de cola de 600 kg. Las coordenadas de su centro de gravedad, en el sistema mostrado, son *G* (2, 0.5, 0.7) m. Diga cuáles son las reacciones del piso sobre cada una de la patas.

(*Sol.* R_A = 120 kg; R_B = 184 kg; R_C = 296 kg)



23. Despreciando el peso propio del mecanismo y toda fricción, calcule la magnitud de la fuerza *Q* capaz de mantener el equilibrio en la conformación mostrada, así como la magnitud de cada una de la componentes cartesianas de las reacciones en las chumaceras *A* y *B*, sabiendo que sólo aquélla resiste el movimiento de la manivela en la dirección del eje de las equis.

(*Sol.* Q = 98 lb; A_X = – 28 lb; A_Y = 28 lb; A_Z = 63 lb; B_Y = – 112 lb; B_Z = 105 lb)

